PART4　確率変数の変換

例題

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$5X-1$　　(2)　$-X$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

Point Pickup

練習

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$10X+2$　　(2)　$-5X-3$

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{35}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{10}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

第 5 講　PART4 確認問題

確率変数 X の確率分布が次の表で与えられている。

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{20}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{1}{30}$	1

このとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

1　$3X+5$

期待値　$E(3X+5)=$ ア

分散　$V(3X+5)=$ イウ

標準偏差　$\sigma(3X+5)=\sqrt{\text{エオ}}$

2　$-6X+4$

期待値　$E(-6X+4)=$ カ

分散　$V(-6X+4)=$ キク

標準偏差　$\sigma(-6X+4)=$ ケ $\sqrt{\text{コサ}}$

PART4　確率変数の変換

例題

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$5X-1$　　(2)　$-X$

X	0	1	2	計
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=0\cdot\frac{3}{10}+1\cdot\frac{6}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{3}{10}+1^2\cdot\frac{6}{10}+2^2\cdot\frac{1}{10}\right)-\left(\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

(1)　$E(5X-1)=5E(X)-1=5\cdot\frac{4}{5}-1=3$

$V(5X-1)=5^2\,V(X)=25\cdot\frac{9}{25}=9$

$\sigma(5X-1)=|5|\sigma(X)=5\cdot\frac{3}{5}=3$　　※$\sigma(5X-1)=\sqrt{V(5X-1)}=\sqrt{9}=3$

(2)　$E(-X)=-E(X)=-\frac{4}{5}$

$V(-X)=(-1)^2\,V(X)=1\cdot\frac{9}{25}=\frac{9}{25}$

$\sigma(-X)=|-1|\sigma(X)=1\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$　　※$\sigma(-X)=\sqrt{V(-X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$

練習

確率変数 X の確率分布が右の表で与えられているとき，次の確率変数の期待値，分散，標準偏差を求めよ。

(1)　$10X+2$　　(2)　$-5X-3$

X	1	2	3	4	5	計
P	$\frac{35}{70}$	$\frac{20}{70}$	$\frac{10}{70}$	$\frac{4}{70}$	$\frac{1}{70}$	1

$$E(X)=1\cdot\frac{35}{70}+2\cdot\frac{20}{70}+3\cdot\frac{10}{70}+4\cdot\frac{4}{70}+5\cdot\frac{1}{70}=\frac{126}{70}=\frac{9}{5}$$

$$V(X)=\left(1^2\cdot\frac{35}{70}+2^2\cdot\frac{20}{70}+3^2\cdot\frac{10}{70}+4^2\cdot\frac{4}{70}+5^2\cdot\frac{1}{70}\right)-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{105}{25}-\frac{81}{25}=\frac{24}{25}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(1)　$E(10X+2)=10E(X)+2=10\cdot\frac{9}{5}+2=20$

$V(10X+2)=10^2\,V(X)=100\cdot\frac{24}{25}=96$

$\sigma(10X+2)=|10|\sigma(X)=10\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$

※$\sigma(10X+2)=\sqrt{V(10X+2)}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

(2)　$E(-5X-3)=-5E(X)-3=-5\cdot\frac{9}{5}-3=-12$

$V(-5X-3)=(-5)^2\,V(X)=25\cdot\frac{24}{25}=24$

$\sigma(-5X-3)=|-5|\sigma(X)=5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=2\sqrt{6}$

※$\sigma(-5X-3)=\sqrt{V(-5X-3)}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

第５講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：7，イウ：11，エオ：11

[解説]

$$E(X)=0\cdot\frac{20}{30}+1\cdot\frac{4}{30}+2\cdot\frac{3}{30}+3\cdot\frac{2}{30}+4\cdot\frac{1}{30}$$ [A]

$$=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=\left(0^2\cdot\frac{20}{30}+1^2\cdot\frac{4}{30}+2^2\cdot\frac{3}{30}+3^2\cdot\frac{2}{30}+4^2\cdot\frac{1}{30}\right)-\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$=\frac{50}{30}-\frac{4}{9}=\frac{11}{9}$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{11}{9}}=\frac{\sqrt{11}}{3}$$

したがって

$$E(3X+5)=3E(X)+5$$ [B]

$$=3\cdot\frac{2}{3}+5=\mathbf{7}$$

$$V(3X+5)=3^2\,V(X)$$ [B]

$$=9\cdot\frac{11}{9}=\mathbf{11}$$

$$\sigma(3X+5)=|3|\sigma(X)$$ [B]

$$=3\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=\sqrt{\mathbf{11}}$$

(別解)

$$\sigma(3X+5)=\sqrt{V(3X+5)}$$

$$=\sqrt{\mathbf{11}}$$

[A]　まず X の期待値，分散，標準偏差を求める。

[B]　$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差
確率変数 X と定数 a，b について

$E(aX+b)=aE(X)+b$

$V(aX+b)=a^2\,V(X)$

$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

2 **[正解]** カ：0，キク：44，ケ：2，コサ：11

[解説]

$$E(X)=\frac{2}{3},\quad V(X)=\frac{11}{9},\quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{11}}{3}$$

であるから

$$E(-6X+4)=-6E(X)+4 \quad \text{[C]}$$
$$=-6\cdot\frac{2}{3}+4=\mathbf{0}$$

$$V(-6X+4)=(-6)^2\cdot V(X) \quad \text{[C]}$$
$$=36\cdot\frac{11}{9}=\mathbf{44}$$

$$\sigma(-6X+4)=|-6|\sigma(X) \quad \text{[C]}$$
$$=6\cdot\frac{\sqrt{11}}{3}=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

(別解)

$$\sigma(-6X+4)=\sqrt{V(-6X+4)}$$
$$=\sqrt{44}$$
$$=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

[C]　$aX+b$ の期待値，分散，標準偏差
確率変数 X と定数 a，b について
$E(aX+b)=aE(X)+b$
$V(aX+b)=a^2\,V(X)$
$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$